Concours d'Entrée à l'Ecole des Ingénieurs
de la Ville de Paris

Epreuve Commune de Mathématiques
Durée 4 h - Coefficient 8

- On notera n, p, q des entiers naturels quelconques strictement positifs.
- On désigne par $M_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients complexes. Quand $n = p$ on note $M_n(\mathbb{C})$ cet espace vectoriel et I la matrice identité.
- On identifie $M_{n,1}(\mathbb{C})$ à $\mathbb{C}^n$ c'est à dire que toute matrice colonne pourra être considérée comme un élément de $\mathbb{C}^n$ et vice-versa.
- Si $A \in M_{n,p}(\mathbb{C})$: $A = (a_{i,j})$ $1 \leq i \leq n$; $1 \leq j \leq p$; on note $\|A\|$ le réel : $\sup_{i,j} |a_{i,j}|$; on admettra qu'on a ainsi défini une norme sur $M_{n,p}(\mathbb{C})$.
- Si (A_m) est une suite de matrices, on dira que la suite (A_m) a pour limite la matrice L si $\lim_{m \to +\infty} \|A_m - L\| = 0$
- Si A est une matrice carrée, on note A^n sa puissance n-ième.
- Si $A \in M_{n,p}(\mathbb{C})$, on identifiera dans certaines questions la matrice A à l'application de $\mathbb{C}^p$ dans $\mathbb{C}^n$ définie par $X \longrightarrow AX$. On note $\mathrm{Ker}\, A$, $\mathrm{Im}\, A$; $\mathrm{rg}\, A$ le noyau, l'image et le rang de A. L'abréviation dim signifie dimension.

Les questions de la première partie sont toutes indépendantes entre-elles. Elles sont utilisées dans la suite du problème.

Première partie

1 Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} n\lambda^n$ existe $\Leftrightarrow |\lambda| < 1$

Trouver une condition nécessaire et suffisante du même type pour :

$\lim_{n \to +\infty} \lambda^n$ existe

2 Soit $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n$ n nombres complexes. On suppose que :

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$$

Montrer qu'il existe un nombre complexe u de module 1 et n réels positifs ou nuls α_i ; $1 \leq i \leq n$ tels que

$$\forall i \in [1, n] \quad z_i = \alpha_i u$$

3 Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, λ une valeur propre de A d'ordre de multiplicité q. On considère la suite (a_m) définie par :

$$a_m = \mathrm{rg}\,(A - \lambda I)^m \; ; \quad m \in \mathbb{N}^*$$

a) Soient B et N deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$; Montrer que :

$$\dim\left(\mathrm{Ker}\, B \cap \mathrm{Im}\, N\right) = \mathrm{rg}\, N - \mathrm{rg}\, BN$$

b) Montrer que la suite (a_m) est décroissante et que la suite $(a_m - a_{m-1})$ est nulle à partir d'un certain rang.

c) Montrer que : $\exists p \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I)^p \oplus \mathrm{Im}\,(A - \lambda I)^p$

d) Monter que : $\dim\left(\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I)^p\right) = q$

e) Que peut-on en conclure si A n'a qu'une unique valeur propre ?

4 Soit (A_m) une suite de matrices : $A_m \in M_{n,p}(\mathbb{C})$.

Soit $L \in M_{n,p}(\mathbb{C})$. Pour (i, j) tel que $1 \leq i \leq n$; $1 \leq j \leq p$ on note $a_{i,j}(m)$ [respectivement $l_{i,j}$] le coefficient de A_m (respectivement L) qui se trouve en ligne i, colonne j.

Vérifier : $\lim_{m \to +\infty} A_m = L \Leftrightarrow \forall i \in [1, n] \; \forall j \in [1, p] \quad \lim_{m \to +\infty} a_{ij}(m) = l_{i,j}$

5 a) Pour $A \in M_{n,p}(\mathbb{C})$; $B \in M_{p,q}(\mathbb{C})$, Montrer que

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$$

b) Soit (A_m) une suite de matrices de $M_{n,p}(\mathbb{C})$;

Soient $B \in M_{p,q}(\mathbb{C})$ et $T \in M_{q,m}(\mathbb{C})$. On suppose que $\lim_{m \to +\infty} A_m = L$

- Montrer que $\lim_{m \to +\infty} A_m B$ existe ; donner sa valeur.
- Montrer que $\lim_{m \to +\infty} T A_m$ existe ; donner sa valeur.

Deuxième partie

Dans cette partie on prend $A \in M_n(\mathbb{C})$ et on suppose la suite $\|A^m\|_{m \in \mathbb{N}^*}$ bornée.

1 Soit λ une valeur propre de A ; montrer que $|\lambda| \leq 1$

2 Soit $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $|\mu| = 1$. On suppose que μ est valeur propre de A d'ordre de multiplicité q.

a) Soit $X \in \mathrm{Ker}(A - \mu I)^2$ et $X \notin \mathrm{Ker}(A - \mu I)$

Former $A^m X$ et aboutir à une contradiction.

Tournez la page S. V. P.

École des Ingénieurs de la Ville de Paris
.Épreuve commune de Math. 1986 page 195

b) En déduire : dim $Ker(A - \mu I) = q$

3 Dans cette question on suppose que : $\lim_{m \to +\infty} A^m$ existe.

Montrer que si λ est valeur propre de A alors $|\lambda| < 1$ ou $\lambda = 1$

Si 1 est valeur propre de A , comparer son ordre de multiplicité avec la dimension de l'espace propre correspondant.

Troisième partie

Dans cette partie, A est une matrice appartenant à $M_3(\mathbb{C})$

1/ Montrer qu'on a nécessairement un des trois cas :

(i) A est diagonalisable

(ii) $\exists (\alpha, \beta, a, b) \in \mathbb{C}^4$ avec $\alpha \neq \beta$ tel que :

A soit semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & c & a \\ c & \beta & b \\ o & 0 & \beta \end{pmatrix}$

(iii) A n'a qu'une valeur propre.

2/ Si $A = \begin{pmatrix} \alpha & o & a \\ o & \beta & b \\ o & c & \beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha \neq \beta$. Donner la valeur de A^m pour $m \in \mathbb{N}^*$

3/ Soit $F = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\} \cup \{1\}$. On suppose que les valeurs de A sont dans $\bar{F}$ et que si 1 est valeur propre de A d'ordre de multiplicité q alors $\dim Ker(A-I) = q$

Montrer que : $\lim_{m \to +\infty} A^m$ existe.

Quatrième partie

Dans cette partie, on considère des sous-ensembles de $M_3(\mathbb{C})$:

$$Q_1 = \left\{ A \in M_3(\mathbb{C}) / a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} = a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3} = a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3} = 1 \right\}$$

$$Q_2 = \left\{ A \in M_3(\mathbb{C}) / \forall i \in [1,3], \forall j \in [1,3] \quad a_{i,j} \in \mathbb{R} \text{ et } a_{ij} \geq 0 \right\}$$

$$Q_3 = \left\{ A \in M_3(\mathbb{C}) / \forall i \in [1,3], \forall j \in [1,3] \quad a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ et } a_{ij} > 0 \right\}$$

1/ a) Soit $A \in Q_1$. Montrer que 1 est valeur propre de A ;

Donner un vecteur propre correspondant.

b) Soient A et B deux éléments de Q_1. Montrer que : $AB \in Q_1$

2/ Soit $A \in Q_1 \cap Q_2$ Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N}^* \quad \|A^m\| \leq 1$.

3/ Soit $A \in Q_1 \cap Q_3$ et λ une valeur propre de A de module 1 et d'ordre de multiplicité q.

a) Montrer que $\lambda^m = 1$ et dim $Ker(A - I) = 1$. (On pourra étudier le système $AX = \lambda X$)

b) En déduire $q = 1$ et $\lim_{m \to +\infty} A^m$ existe

4/ Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Vérifier $A \in Q_1 \cap Q_2$. Calculer A^m pour $m \in \mathbb{N}^*$

5/ Soit $A \in Q_1 \cap Q_2$ telle que $\exists p \geq 2 \quad A^p \in Q_1 \cap Q_3$

montrer que : $\lim_{m \to +\infty} A^m$ existe

page 196 1986 Ecole des Ingenieurs de la Ville de Paris
.Epreuve commune de Math.